

Zur kontaktlosen Messung des elektrischen Widerstandes dünner Schichten. Berechnung des Einflusses der Schichtgeometrie*

J. SCHMAND

Institut für Kernphysik der Universität Münster

(Z. Naturforsch. 24 a, 1124—1130 [1969]; eingegangen am 24. April 1969)

*Contactless measuring of the electric resistance of thin films.
Calculation of the influence of film geometry*

Using the formerly described nondestructive method for contactless measuring electric resistances, the film in question is brought in parallel position to a metalplate. The reactance $1/Z$ of this arrangement is a function of $(\omega R_{\square} C)$, the product of measuring frequency, resistance per unit area of the film and capacity of the arrangement. With decreasing ω or R_{\square} the imaginary part of $1/Z$ rises from 0 to C while the real part passes through a distinct maximum for $K = (\omega R_{\square} C)_{\max}$. K depends strongly on the geometry of the film. Exact knowledge of K with known ω and C allows to determine R_{\square} . Therefore $1/Z$ has been calculated as function of $(\omega R_{\square} C)$ for the most usual geometries of thin films.

Die elektrische Leitfähigkeit dünner metallischer Schichten wird im allgemeinen durch eine Strom-Spannungsmessung bestimmt. Das ist jedoch nicht möglich, wenn sich an der Schicht keine Kontakte anbringen lassen oder die Schicht ringsum von einem Kontakt umgeben ist. Letzteres ist z. B. der Fall, wenn dünne, leitende Schichten hergestellt werden, indem man auf Metallrähmchen aufgespannte organische Trägerfolien metallisch bedampft. Solche Folien verwendet man als Präparatunterlagen in 4π -Zählrohren. Wenn die Folie sich dabei in der Zählrohrrentladung elektrisch auflädt, wird die Zählrate verfälscht. Um das zu vermeiden, muß eine bestimmte Mindestleitfähigkeit des Metallbelages gefordert werden, die von der Zählrate und der je Zählstoß umgesetzten Ladung abhängt. Die elektrische Leitfähigkeit der Folien muß also vor der Verwendung im Zählrohr gemessen werden. Außerdem sollte die Leitfähigkeit jederzeit nachprüfbar sein, um evtl. mögliche Leitfähigkeitsänderungen des Metallbelages feststellen zu können.

In den oben erwähnten Fällen läßt sich der elektrische Flächenwiderstand $R_{\square} = \varrho/D$ (ϱ = spezif. Widerstand, D = Schichtdicke) mit Hilfe eines kapazitiven Meßverfahrens bestimmen, das bereits früher beschrieben wurde¹. Damit sind Flächenwiderstände von $10^{10} \Omega$ bis herab zu einigen Ω meßbar. Die zu untersuchende Schicht wird parallel zu einer gut leitenden Metallplatte angebracht. Dazwischen befindet sich ein Dielektrikum der Dicke d . Lassen sich an

der Schicht keine Kontakte anbringen, so stellt man der Schicht eine in der Mitte unterteilte Metallplatte gegenüber. Wie die Messungen zeigten, ist die Reaktanz $1/Z$ zwischen Schicht und Metallplatte bzw. zwischen den beiden Plattenhälften eine Funktion von $(\omega R_{\square} C)$, dem Produkt aus Meßfrequenz, Flächenwiderstand der Schicht und statischer Kapazität der Anordnung.

Der kapazitive Anteil von $1/Z$ steigt mit kleiner werdendem R_{\square} (bzw. ω) bei entsprechender Normierung von 0 auf 1 an, und dies bei um so geringerem R_{\square} (bzw. ω), je größer ω (bzw. R_{\square}) ist. Der Realteil $\text{Re}(1/Z)$ durchläuft gleichzeitig ein ausgeprägtes Maximum, dessen Argument

$$K = (\omega R_{\square} C)_{\max}$$

nur von der Geometrie der Anordnung, wie Größe der Schicht, Form der Kontakte etc. abhängt. Für verschiedene Geometrien hat der „Geometriefaktor“ K verschiedene Werte.

Die Lage des Maximums benutzt man zur Bestimmung des Flächenwiderstandes der zu untersuchenden Schicht. Mißt man $\text{Re}(1/Z)$ in Abhängigkeit von ω , so findet man eine Frequenz ω_{\max} , für die $\text{Re}(1/Z)$ maximal wird. Kennt man nun K für die vorliegende Schichtgeometrie genau, so läßt sich daraus der Flächenwiderstand der Schicht berechnen. (C ist stets meßbar.)

Doch kann man auch während des Entstehens einer dünnen Schicht ihren Flächenwiderstand mes-

Sonderdruckanforderungen erbeten an Dr. J. Schmand, Institut für Kernphysik der Universität Münster, D-4400 Münster/Westf., Tibusstr. 7—15.

* Auszug aus D 6 (1966).

¹ E. HUSTER, W. RAUSCH u. J. SCHMAND, Z. Naturforsch. 19 a, 1126 [1964].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

sen und so Schichten definierten Widerstandes herstellen. Dampft man z. B. die Schicht auf, so verfolgt man während des Aufdampfens den Verlauf von $\operatorname{Re}(1/Z)$ bei fest gewählter Meßfrequenz ω_{\max} , die man bei Kenntnis von K und C für jedes gewünschte R_{\square} berechnen kann. Im Maximum von $\operatorname{Re}(1/Z)$ bricht man die Bedampfung ab und hat damit eine Schicht mit dem gewünschten Flächenwiderstand R_{\square} .

Voraussetzung zur Anwendung des kapazitiven Meßverfahrens ist also die genaue Kenntnis des „Geometriefaktors“ K . Experimentell läßt sich K für die meisten Schichtgeometrien nicht bestimmen. Man kann zwar an einer Schicht mit z. B. rechteckigem Ringsumkontakt $\operatorname{Re}(1/Z)$ als Funktion von ω messen und damit auch ω_{\max} bestimmen. Da sich der Flächenwiderstand derselben Schicht wegen des Ringsumkontaktes jedoch nicht messen läßt, ist eine Bestimmung von K so nicht möglich.

Deshalb wurde an einer dünnen rechteckigen Schicht mit zwei gegenüberliegenden Kontakten R_{\square} gemessen. Nachdem auch die beiden anderen Rechteckseiten mit Kontakten versehen worden waren, wurde ω_{\max} bestimmt. Die so ermittelten Werte für K waren jedoch nicht reproduzierbar, weil R_{\square} sich beim Anbringen der zusätzlichen Kontakte ändert. (Beim Aufdampfen dieser Kontakte wird die Schicht getempert; bringt man Leitsilberkontakte an, wird die Schicht dabei zerstört.)

Eine exakte experimentelle Bestimmung des Geometriefaktors K ist somit nicht möglich. Berechnen läßt sich K ohne größeren Aufwand nur für den einfachsten geometrischen Fall (rechteckige Schicht mit zwei gegenüberliegenden Kontakten), für den auch eine experimentelle Bestimmung möglich ist.

Da es aber gerade für die anderen Geometrien wünschenswert erscheint, mit Hilfe des kapazitiven Meßverfahrens Flächenwiderstände *absolut* bestimmen zu können, wird im folgenden der Geometriefaktor K für die gebräuchlichsten Schichtgeometrien numerisch berechnet.

Berechnung des Faktors K für verschiedene Geometrien dünner Schichten

1. Allgemeiner Ansatz

Die mit dem kapazitiven Meßverfahren zu untersuchende dünne Schicht habe eine beliebige geometrische Gestalt und sei mit beliebigen Kontakten versehen. (x_1, x_2) sei ein in der Schicht liegendes, beliebiges Koordinatensystem, das später der Gestalt

der Kontakte speziell angepaßt wird. Parallel zur Schicht befindet sich eine elektrisch gut leitende Metallplatte. Beide sind durch ein Dielektrikum der Dicke d voneinander getrennt. Zwischen Kontakt und Metallplatte liegt die Wechselspannung $V = \bar{U} e^{j\omega t}$ (\bar{U} = Scheitelspannung, j = imaginäre Einheit, ω = Kreisfrequenz, t = Zeit), die in der Schicht einen Wechselstrom $I = \bar{I} e^{j\omega t}$ (\bar{I} = Scheitelstrom) erzeugt.

Zu berechnen ist die Impedanz Z bzw. die Reaktanz $1/Z$ dieser Anordnung.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir weiter an, daß die Schichtdicke D überall gleich und vernachlässigbar klein gegen Länge und Breite der Schicht ist. Außerdem sei der Flächenwiderstand der Schicht und die Kapazität pro Flächeneinheit über die ganze Schicht konstant, d. h. für jeden Ort der Schicht soll gelten:

$$R(x_1, x_2) = R_{\square} \quad \text{bzw.} \quad C(x_1, x_2) = C_{\square}.$$

Mit $\mathfrak{J}(x_1, x_2, t)$, der Stromdichte, $V(x_1, x_2, t)$, der Spannung und $\mathfrak{E}(x_1, x_2, t)$, der elektrischen Feldstärke zur Zeit t am Orte (x_1, x_2) gilt dann auf Grund des Ohmschen Gesetzes für einen beliebigen Ort der Schicht

$$\mathfrak{J}(x_1, x_2, t) = \sigma \cdot \mathfrak{E}(x_1, x_2, t). \quad (1.1)$$

Da $1/\sigma = R_{\square} D$ ist, folgt daraus

$$\nabla V(x_1, x_2, t) = -R_{\square} D \mathfrak{J}(x_1, x_2, t). \quad (1.2)$$

Mit der elektrischen Flächenladungsdichte

$$Q(x_1, x_2, t) = C_{\square} V(x_1, x_2, t)$$

erhält man die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\nabla \cdot \mathfrak{J}(x_1, x_2, t) = -\frac{C_{\square}}{D} \frac{\partial}{\partial t} V(x_1, x_2, t). \quad (1.3)$$

Einsetzen von (1.2) in (1.3) ergibt

$$\Delta V(x_1, x_2, t) = R_{\square} C_{\square} \frac{\partial}{\partial t} V(x_1, x_2, t). \quad (1.4)$$

Entsprechend berechnet man für die Stromdichte

$$\nabla \nabla \cdot \mathfrak{J}(x_1, x_2, t) = R_{\square} C_{\square} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{J}(x_1, x_2, t). \quad (1.5)$$

Separiert man den Zeitanteil, indem man

$$V(x_1, x_2, t) = U(x_1, x_2) e^{j\omega t}$$

und $\mathfrak{J}(x_1, x_2, t) = \mathfrak{j}(x_1, x_2) e^{j\omega t}$ setzt,

so erhält man die Differentialgleichungen

$$\Delta U(x_1, x_2) = j\omega R_{\square} C_{\square} U(x_1, x_2) \quad (1.6)$$

$$\text{und} \quad \nabla \nabla \cdot \mathfrak{j}(x_1, x_2) = j\omega R_{\square} C_{\square} \mathfrak{j}(x_1, x_2). \quad (1.7)$$

Die Lösungen dieser homogenen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung müssen der jeweiligen geometrischen Gestalt der Schicht angepaßt sein. Daraus läßt sich dann der Wechselstromwiderstand Z bzw. die Reaktanz $1/Z$ der Anordnung Schicht – Metallplatte berechnen, wozu die Lösung nur einer der beiden Differentialgleichungen erforderlich ist.

2. Rechteckige Schicht mit einseitigem Kontakt

Eine rechteckige Schicht werde durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) so beschrieben, daß eine Ecke der Schicht im Ursprung des Koordinatensystems liegt und die gegenüberliegende Ecke die Koordinaten $x=L$, $y=B$ hat (L =Länge, B =Breite der Schicht). Die Schicht sei mit einem Kontakt der Breite B versehen und im Abstand d parallel zu einer Metallplatte angebracht. Zwischen Kontakt und Platte liegt eine Wechselspannung $V = \bar{U} e^{j\omega t}$. Wenn wir von eventuellen Randstörungen absehen, können wir das Problem eindimensional behandeln, d. h. $U(x_1, x_2) = U(x)$. Damit schreibt sich (1.6):

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} - j\omega R_{\square} C_{\square} U(x) = 0. \quad (2.1)$$

Außerdem gelten zu jeder Zeit die Randbedingungen

$$U(0) = \bar{U} \quad \text{für } x=0$$

$$\text{und } (\nabla U(x))_{x=L} = 0 \quad \text{für } x=L.$$

Das heißt, am Schichtende ist die Stromdichte $j(L) = 0$. Setzt man

$$k = \sqrt{j\omega R_{\square} C_{\square}/2} \quad \text{und} \quad \alpha = (1+j)k,$$

so lautet die allgemeine Lösung von (2.1)

$$U(x) = \bar{U}_1 e^{\alpha x} + \bar{U}_2 e^{-\alpha x}.$$

Nach Einsetzen der Randbedingungen erhält man die Spannung

$$U(x) = \bar{U} \left(\frac{e^{(1+j)kx}}{1+e^{2(1+j)kL}} + \frac{e^{-(1+j)kx}}{1+e^{-2(1+j)kL}} \right). \quad (2.2)$$

Daraus läßt sich die Impedanz Z bzw. $1/Z$ berechnen.

Da die Dicke D der Schicht stets klein gegen ihre Länge und Breite ist, kann man die Ortsabhängigkeit der Stromdichte j senkrecht zur Schicht vernachlässigen. Dann erhält man für den Scheitelwert des auf den gesamten Kontakttrand fließenden Stromes I das Linienintegral $\bar{I} = D \int j \cdot d\vec{s}$. Das bedeutet für unseren Fall

$$\bar{I} = -\frac{1}{R_{\square}} \int_0^B \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=0} dy = -\frac{B}{R_{\square}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (2.3)$$

Man erhält daraus mit (2.2) für $(1/Z) = (\bar{I}/\bar{U})_{x=0}$

$$1/Z = ((1+j)kL/R) \operatorname{tgh}[(1+j)kL]. \quad (2.4)$$

Spaltet man (2.4) in Real- und Imaginärteil auf:

$$1/Z = G_{\text{real}} + j \cdot G_{\text{imag}},$$

so erhält man dimensionslose Größen, wenn man

$$P_x/C = (2/\omega C) G_{\text{real}} \quad \text{und} \quad C_x/C = (1/\omega C) G_{\text{imag}}$$

setzt. Führt man die Gesamtkapazität der Schicht, $C = LB C_{\square}$ und den Gesamtwiderstand in x -Richtung, $R = R_{\square} \cdot L/B$, ein, so erhält man

$$P_x/C = \frac{2}{\sqrt{2}\omega RC} \frac{\sinh \sqrt{2}\omega RC - \sin \sqrt{2}\omega RC}{\cosh \sqrt{2}\omega RC + \cos \sqrt{2}\omega RC}, \quad (2.5)$$

$$C_x/C = \frac{1}{\sqrt{2}\omega RC} \frac{\sinh \sqrt{2}\omega RC + \sin \sqrt{2}\omega RC}{\cosh \sqrt{2}\omega RC + \cos \sqrt{2}\omega RC}. \quad (2.6)$$

Beide Größen sind Funktionen des Produktes (ωRC) .

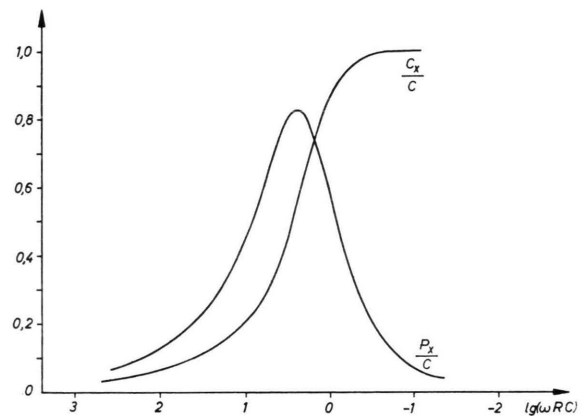


Abb. 1. Berechneter Kurvenverlauf von (2.5) und (2.6). Rechteckige Schicht mit einseitigem Kontakt.

Abbildung 1 zeigt den berechneten Verlauf von (2.5) und (2.6). Im Maximum von P_x/C gilt

$$(\omega RC)_{\text{max}} = K' = 2,5410,$$

wobei $(P_x/C)_{\text{max}} = 0,834$ und $(C_x/C)_{\text{max}} = 0,582$ sind. $(C_x/C)_{\text{max}}$ ist der zum Maximum von P_x/C gehörende Wert von C_x/C . Führt man statt des Gesamtwiderstandes R den Flächenwiderstand R_{\square} ein, so ergibt sich

$$K_{B/L} = (\omega R_{\square} C)_{\text{max}} = K' \cdot B/L = 2,5410 \cdot B/L. \quad (2.7)$$

Der „Geometriefaktor“ $K_{B/L}$ hängt linear vom Seitenverhältnis B/L ab, d. h. das Maximum von P_x/C

wird bei gleichem Seitenverhältnis B/L stets für denselben Geometriefaktor $K_{B/L}$ erreicht.

3. Kreisförmige Schicht mit ringförmigem Kontakt

Die Schicht sei mit einem ringförmigen Kontakt versehen (innerer Durchmesser $= 2a$) und befinde sich im Abstände d parallel zu einer kreisförmigen Metallplatte. Zwischen dieser und der Schicht liege die Wechselspannung $V = \bar{U} e^{j\omega t}$. Für das vorliegende radialsymmetrische Problem führen wir die ebenen Polarkoordinaten r und φ ein, d. h.

$$U(x_1, x_2) = U(r).$$

Damit schreibt sich (1.6):

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - j\omega R_{\square} C_{\square} U(r) = 0. \quad (3.1)$$

Durch Einführen der neuen Variablen $\varrho = k \cdot r$ mit $k = \sqrt{j\omega R_{\square} C_{\square}}$ und $\varrho_a = ka$ nimmt (3.1) die Form an

$$\frac{d^2 U(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dU(\varrho)}{d\varrho} - j \cdot U(\varrho) = 0. \quad (3.2)$$

Lösungen dieser Differentialgleichungen stellen die modifizierten Zylinderfunktionen dar und in diesem speziellen Fall die Kelvinschen Funktionen nullter Ordnung: $ber_0(\varrho)$, $bei_0(\varrho)$, $ker_0(\varrho)$, $kei_0(\varrho)$ ².

Als allgemeine Lösungen von (3.2) findet man:

$$J_0(\varrho e^{(3\pi/4)j}) = ber_0(\varrho) + j \cdot bei_0(\varrho)$$

(J_0 = Bessel-Funktion nullter Ordnung)

und

$$\frac{1}{2} \pi j H_0^{(1)}(\varrho e^{(3\pi/4)j}) = ker_0(\varrho) + j \cdot kei_0(\varrho).$$

($H_0^{(1)} = 1$. Hankel-Funktion nullter Ordnung).

Im folgenden wird der Index 0 fortgelassen und es soll sein:

$$ber'(\varrho) = \frac{d}{d\varrho} ber(\varrho) \text{ usw.}$$

Berücksichtigt man noch die Randbedingungen

$$U(\varrho_a) = \bar{U} \text{ für } \varrho = ka$$

und $(\nabla U(\varrho))_{\varrho=0} = 0$ für $\varrho = 0$ (d. h. $j(0) = 0$),

sowie das Verhalten der 1. Ableitungen der Kelvinschen Funktionen nullter Ordnung für $\varrho = 0$, so erhält man für die Spannung

$$U(\varrho) = \bar{U} \frac{ber(\varrho) + j \cdot bei(\varrho)}{ber(\varrho_a) + j \cdot bei(\varrho_a)}. \quad (3.3)$$

Mit dem Scheitelwert des auf den Kontakt fließenden Gesamtstromes

$$\bar{I} = - \frac{a}{R_{\square}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=a} d\varphi = - \frac{2\pi a}{R_{\square}} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=a}$$

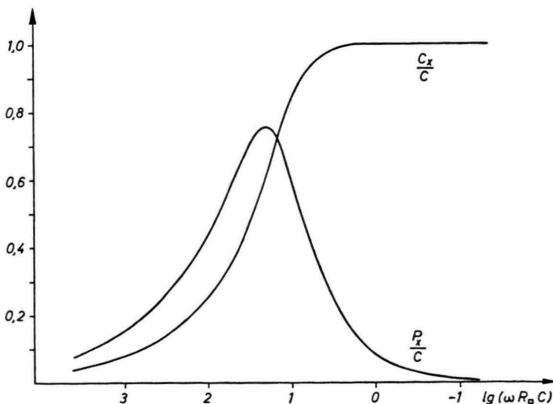
läßt sich dann die Reaktanz $1/Z = (\bar{I}/\bar{U})_{r=a}$ berechnen:

$$\frac{1}{Z} = \frac{2\pi \varrho_a}{R_{\square}} \frac{ber'(\varrho_a) + j \cdot bei'(\varrho_a)}{ber(\varrho_a) + j \cdot bei(\varrho_a)}. \quad (3.4)$$

Eine Aufspaltung von (3.4) in Real- und Imaginärteil ergibt nach Umrechnung und Einsetzen von $C = \pi a^2 C_{\square}$

$$P_x/C = 4 \sqrt{\frac{\pi}{\omega R_{\square} C}} \frac{ber \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} \cdot ber' \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} + bei \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} \cdot bei' \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi}}{ber^2 \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} + bei^2 \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi}}, \quad (3.5)$$

$$C_x/C = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\omega R_{\square} C}} \frac{ber \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} \cdot bei' \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} - bei \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} \cdot ber' \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi}}{ber^2 \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi} + bei^2 \sqrt{j\omega R_{\square} C/\pi}}. \quad (3.6)$$



Berechnet³ man (3.5) und (3.6), so erhält man für eine kreisrunde Schicht den Geometriefaktor (siehe auch Abb. 2)

$$K_0(\omega R_{\square} C)_{\max} = 19,78 \quad (3.7)$$

mit

$$(P_x/C)_{\max} = 0,755 \text{ und } (C_x/C)_{\max} = 0,618.$$

← Abb. 2. Berechneter Kurvenverlauf von (3.5) und (3.6). Kreisrunde Schicht mit ringförmigem Kontakt.

² M. ABRAMOWITZ u. I. A. STEGUN, Handbook of Mathematical Functions, 2. Aufl., Nat. Bur. Stand. Washington, D.C., 1964, S. 379.

³ JAHNKE-EMDE-LÖSCH, Tafeln höherer Funktionen, 6. Aufl., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1960, S. 207 ff.

4. Rechteckige Schicht mit allseitigem Kontakt

Eine rechteckige Schicht der Fläche $F = a b$ sei ringsum mit einem Kontakt versehen. Der Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems (x, y) liege in der Mitte der Schicht, die Koordinaten seien parallel zum Kontakt. Im Abstände d befinde sich wieder eine gut leitende Metallplatte parallel zur Schicht. Zwischen beiden liege die Wechselspannung $V = \bar{U} e^{j\omega t}$.

Mit $U(x_1, x_2) = \bar{U} \Phi(x, y)$ und $k = \sqrt{\omega R_{\square} C_{\square}}$ nimmt (1.6) folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} - j k^2 \Phi(x, y) = 0. \quad (4.1)$$

Die Randbedingungen lauten

$\Phi(x, y) = 1$ für

$$-\frac{1}{2}a \leq x \leq +\frac{1}{2}a; \quad y = \pm b/2 \quad (4.2a)$$

$$-\frac{1}{2}b \leq y \leq +\frac{1}{2}b; \quad x = \pm a/2 \quad (4.2b)$$

und

$$(\nabla \Phi(x, y))_{x=y=0} = 0 \quad (\text{d. h. } j(0, 0) = 0). \quad (4.2c)$$

Setzt man zunächst den Lösungsansatz

$$\Phi \equiv \varphi_0(x, y) = u_0(x) v_0(y)$$

mit

$$v_0(y) \equiv 1$$

unter Berücksichtigung der aus (4.2b) und (4.2c) spezifizierten Randbedingungen $u_0(\pm a/2) = 1$ und $(\nabla u_0(x))_{x=0} = 0$ in (4.1) ein, so erhält man als Lösung

$$u_0(x) = 2 C_0 \cosh[(1+j) k x / \sqrt{2}] \quad (4.3)$$

mit

$$C_0 = \frac{1}{2 \cosh[\beta(1+j)]} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{a k}{2 \sqrt{2}}.$$

Mit dieser Teillösung (4.3) macht man nun den

Reihenansatz

$$\Phi(x, y) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, y), \quad (4.4)$$

wobei

$$\varphi_n(x, y) = u_n(x) v_n(y) \quad \text{ist.}$$

Durch Einsetzen von (4.4) in (4.1) erhält man nach Separation der Variablen für alle $n \geq 1$

$$\frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + j \alpha_n^2 u_n(x) = 0 \quad (4.5)$$

und

$$\frac{d^2 v_n(y)}{dy^2} - j(k^2 + \alpha_n^2) v_n(y) = 0. \quad (4.6)$$

Alle $u_n(x) = 2 C_n \cosh[(1-j) \alpha_n x / \sqrt{2}]$ erfüllen bereits die Randbedingungen (4.2c) und sind Lösungen zu (4.5). Damit die der Teillösung (4.3) bereits angepaßte Randbedingung (4.2b) auch für die Gesamtlösung (4.4) gilt, müssen für alle $n \geq 1$ und $x = \pm \frac{1}{2}a$ die Funktionen $u_n(x) = 0$ werden. Das ist der Fall, wenn

$$\alpha_n = (1-j) h_n / \sqrt{2} \quad \text{und} \quad h_n = (\pi/a) (2n-1) \quad \text{sind.}$$

Damit erhält man die mit den Randbedingungen verträglichen Lösungen zu (4.5)

$$u_n(x) = 2 C_n \cos[(2n-1) (\pi/a) x]. \quad (4.7)$$

Entsprechend sind alle

$$v_n(y) = 2 \cosh[(r_n + j \cdot s_n) \cdot y / \sqrt{2}] \quad (4.8)$$

mit

$$r_n = (k^2 + h_n^2 + \sqrt{k^4 + h_n^4}) / \sqrt{2(k^2 + \sqrt{k^4 + h_n^4})}$$

und

$$s_n = (k^2 - h_n^2 + \sqrt{k^4 + h_n^4}) / \sqrt{2(k^2 + \sqrt{k^4 + h_n^4})}$$

Lösungen zu (4.6) und erfüllen die Randbedingungen (4.2c).

Setzt man nun $\varphi_0 = u_0$, (4.7) und (4.8) in (4.4) ein, so erhält man die Lösung zu (4.1)

$$\Phi(x, y) = 2 C_0 \cosh[(k/\sqrt{2})(1+j)x] + 4 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos[(2n-1)(\pi/a)x] \cdot \cosh[(r_n + j \cdot s_n)y/\sqrt{2}]. \quad (4.9)$$

Den bis jetzt noch nicht berücksichtigten Randbedingungen (4.2a) wird entsprochen durch Anpassen der Koeffizienten C_n in (4.9):

$$1 = 2 C_0 \cosh[(k/\sqrt{2})(1+j)x] + 4 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos[(2n-1)(\pi/a)x] \cdot \cosh[(b/2\sqrt{2})(r_n + j \cdot s_n)]. \quad (4.10)$$

Auf Grund der Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen und nach Integration über x lassen sich aus (4.10) die Koeffizienten C_n berechnen. Und zwar ist

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{a \cdot h_n \cdot \cosh[(b/2\sqrt{2})(r_n + j \cdot s_n)]} + \frac{C_0 (A_n + j \cdot B_n)}{a \cdot \cosh[(b/2\sqrt{2})(r_n + j \cdot s_n)]}, \quad (4.11)$$

wobei

$$A_n = \frac{2 h_n (-1)^n}{(k^4 + h_n^4)} (k^2 \cdot \sinh \beta \cdot \sin \beta + h_n^2 \cdot \cosh \beta \cdot \cos \beta)$$

und

$$B_n = \frac{2 h_n (-1)^n}{(k^4 + h_n^4)} (h_n^2 \cdot \sinh \beta \cdot \sin \beta - k^2 \cdot \cosh \beta \cdot \cos \beta).$$

Mit diesen Koeffizienten C_n ist (4.9) die dem Problem angepaßte Lösung der Differentialgleichung (4.1).

Nun muß man wieder den Scheitelwert \bar{I} des auf den Kontakt fließenden Gesamtstromes I berechnen, um dann zusammen mit (4.9) den Kehrwert der Impedanz $1/Z = (\bar{I}/\bar{U})_{\text{Rand}}$ angeben zu können. Die Integration über den Kontaktrand ergibt

$$\bar{I} = -\frac{\bar{U}}{R_{\square}} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{a/2} dy + \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{-b/2} dx + \int_{b/2}^{-b/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{-a/2} dy + \int_{a/2}^{-a/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{b/2} dx \right\}.$$

Daraus berechnet sich der Kehrwert der Impedanz zu

$$\frac{1}{Z} = -\frac{2}{R_{\square}} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{a/2} dy + \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{b/2} dx \right\}. \quad (4.12)$$

Nach Differentiation und Integration ergibt sich dann

$$\frac{1}{Z} = -\frac{2}{R_{\square}} \left\{ 2 C_0 \frac{k b}{\sqrt{2}} (1+j) \sinh[\beta(1+j)] + 16 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{j k^2 (-1)^{n+1}}{\sqrt{2} h_n (r_n + j \cdot s_n)} \cdot \sinh \left[\frac{b}{2\sqrt{2}} (r_n + j \cdot s_n) \right] \right\}. \quad (4.13)$$

Eine Aufspaltung von (4.13) in Real- und Imaginärteil ergibt die gesuchten Funktionen P_x/C und C_x/C .

Verwendet man die Bezeichnungen

$$\delta_n = \frac{b \cdot r_n}{2\sqrt{2}}, \quad \eta_n = \frac{b \cdot s_n}{2\sqrt{2}},$$

$$\bar{A}_n = \frac{k^4 + h_n^4}{2 h_n} \cdot A_n, \quad \bar{B}_n = \frac{k^4 + h_n^4}{2 h_n} \cdot B_n,$$

$$N_0 = (\cosh \beta \cdot \cos \beta)^2 + (\sinh \beta \cdot \sin \beta)^2,$$

$$N_1 = (\cosh \delta_n \cdot \cos \eta_n)^2 + (\sinh \delta_n \cdot \sin \eta_n)^2,$$

$$D_n = \cosh \beta \cdot \cos \beta \cdot \sinh \delta_n \cdot \cosh \delta_n$$

$$+ \sinh \beta \cdot \sin \beta \cdot \cos \eta_n \cdot \sin \eta_n,$$

$$E_n = \cosh \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos \eta_n \cdot \sin \eta_n$$

$$- \sinh \beta \cdot \sin \beta \cdot \sinh \delta_n \cdot \cosh \delta_n,$$

so erhält man

$$\frac{P_x}{C} = -\frac{4(\sinh \beta \cdot \cosh \beta - \sin \beta \cdot \cos \beta)}{\sqrt{2} a k N_0}$$

$$- 64 \sum_{n=1}^{10} \left\{ \frac{s_n \cdot \sinh \delta_n \cdot \cosh \delta_n - r_n \cdot \sin \eta_n \cdot \cos \eta_n}{a^2 b \sqrt{2} h_n^2 (r_n^2 + s_n^2) N_1} \right.$$

$$\left. - \frac{s_n (\bar{A}_n D_n - \bar{B}_n E_n) - r_n (\bar{A}_n E_n + \bar{B}_n D_n)}{a^2 b \sqrt{2} (r_n^2 + s_n^2) (k^4 + h_n^4) N_0 N_1} \right\} \quad (4.14)$$

und

$$\frac{C_x}{C} = -\frac{2(\sinh \beta \cdot \cosh \beta + \sin \beta \cdot \cos \beta)}{\sqrt{2} a k N_0}$$

$$- 32 \sum_{n=1}^{10} \left\{ \frac{r_n \cdot \sinh \delta_n \cdot \cosh \delta_n + s_n \cdot \sin \eta_n \cdot \cos \eta_n}{a^2 b \sqrt{2} h_n^2 (r_n^2 + s_n^2) N_1} \right.$$

$$\left. - \frac{s_n (\bar{A}_n E_n + \bar{B}_n D_n) + r_n (\bar{A}_n D_n - \bar{B}_n E_n)}{a^2 b \sqrt{2} (r_n^2 + s_n^2) (k^4 + h_n^4) N_0 N_1} \right\}. \quad (4.15)$$

⁴ Die Rechnungen wurden am Rechenzentrum der Universität Münster durchgeführt.

Eine numerische Berechnung⁴ der einzelnen Summenglieder von (4.14) und (4.15) ergab, daß beide Reihen bei $n=10$ abgebrochen werden dürfen, ohne daß die Werte von P_x/C und C_x/C dadurch beeinflusst werden.

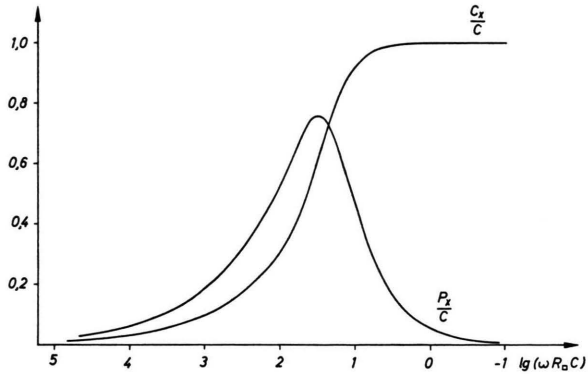


Abb. 3. Berechneter Kurvenverlauf von (4.14) und (4.15). Rechteckige Schicht der Fläche $F=4,2 \times 10,0 \text{ cm}^2$ mit allseitigem Kontakt.

Der Verlauf von P_x/C und C_x/C wurde für verschiedene Seitenlängen a und b als Funktion von $(\omega R_{\square} C_{\square})$ berechnet. Dabei ergibt sich für gleiche Seitenverhältnisse a/b , aber verschiedene Flächen $F=a \cdot b$, zwar ein ähnlicher Kurvenverlauf, jedoch sind die zum Maximum von P_x/C gehörenden Argumente $(\omega R_{\square} C_{\square})_{\text{max}}$ verschieden. Trägt man dagegen, wie in Abb. 3, P_x/C und C_x/C als Funktion von

$\log(\omega R_{\square} C)$ auf, wobei $C = a b C_{\square}$ ist, so findet man das Maximum von P_x/C bei gleichem Seitenverhältnis a/b , unabhängig von der Fläche $F = a b$, stets bei gleichem Argument $(\omega R_{\square} C)_{\max}$. Das heißt, vergrößert man bei gleichbleibendem Seitenverhältnis a/b die Fläche F der Schicht und damit C , so wird die Umladungszeit $2\pi/\omega$ der Schicht in gleichem Maße größer.

Der Geometriefaktor $K_{a/b} = (\omega R_{\square} C)_{\max}$ ist also für rechteckige Schichten mit allseitigem Kontakt bestimmt durch das Seitenverhältnis a/b (Abb. 4).

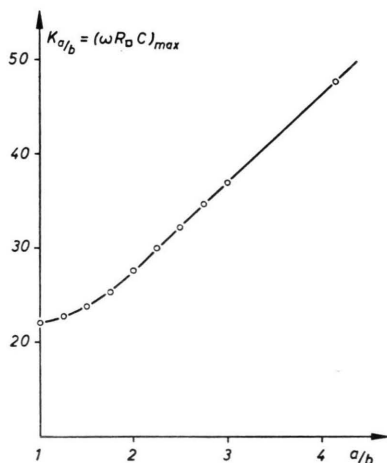


Abb. 4. Geometriefaktor $K_{a/b} = (\omega R_{\square} C)_{\max}$ für rechteckige Schichten mit allseitigem Kontakt in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis a/b . Die Kreise stellen berechnete Werte dar.

Tabelle 1 gibt die Größen $K_{a/b}$, $(P_x/C)_{\max}$ und $(C_x/C)_{\max}$ für verschiedene Seitenverhältnisse a/b wieder. $(C_x/C)_{\max}$ ist der zum Maximum von P_x/C gehörende Wert von C_x/C .

a/b	$K_{a/b}$	$(P_x/C)_{\max}$	$(C_x/C)_{\max}$
1,00	22,05	0,7312	0,6304
1,25	22,75	0,7339	0,6249
1,50	23,78	0,7385	0,6271
1,75	25,30	0,7443	0,6194
2,00	27,61	0,7502	0,6203
2,25	30,00	0,7559	0,6106
2,38	31,13	0,7588	0,6139
2,50	32,20	0,7613	0,6129
2,75	34,62	0,7661	0,6097
3,00	36,91	0,7705	0,6086
4,15	47,64	0,7854	0,6056
10,00	107,15	0,8125	0,5897

Tab. 1. Geometriefaktor $K_{a/b}$, $(P_x/C)_{\max}$ und $(C_x/C)_{\max}$ für verschiedene Seitenverhältnisse a/b .

⁵ Veröffentlichung in Vorbereitung.

Zusammenfassung

Stellt man einer dünnen, leitenden Schicht eine Metallplatte parallel gegenüber, so sind Real- und Imaginärteil der Reaktanz $1/Z$ dieser Anordnung als Funktion des Produktes $(\omega R_{\square} C)$ darstellbar (ω = Meßfrequenz, R_{\square} = Flächenwiderstand der Schicht, C = statische Kapazität der Anordnung). Der Realteil durchläuft dabei ein Maximum. Aus dem Argument $K = (\omega R_{\square} C)_{\max}$ dieses Maximums läßt sich bei Kenntnis der Meßgrößen ω_{\max} und C der Flächenwiderstand der Schicht ermitteln, vorausgesetzt, man kennt den genauen Wert des Argumentes $K = (\omega R_{\square} C)_{\max}$ für die betreffende Schichtgeometrie.

Experimentell läßt sich K nur in den einfachsten Fällen berechnen (so bei rechteckigen Schichten mit einseitigem Kontakt oder zwei Kontakten an gegenüberliegenden Seiten).

Die in dieser Arbeit dargestellten Berechnungen des Kurvenverlaufs von Real- und Imaginärteil der Reaktanz $1/Z$ machen eine experimentelle Bestimmung von K überflüssig. Mit Hilfe vorliegender Rechenprogramme lassen sich für kreisrunde Schichten beliebigen Durchmessers und für rechteckige Schichten beliebiger Seitenverhältnisse a/b Real- und Imaginärteil von $1/Z$ als Funktion von $(\omega R_{\square} C)$ numerisch berechnen. Den so erhaltenen Kurven für $\text{Re}(1/Z)$ entnimmt man den „Geometriefaktor“ $K = (\omega R_{\square} C)_{\max}$. Für kreisrunde Schichten ist K unabhängig vom Radius der Schicht, wenn man davon absieht, daß C natürlich proportional der Fläche der Schicht ist. Für rechteckige Schichten hängt K nur vom Seitenverhältnis a/b ab und kann somit für jedes Seitenverhältnis a/b einer graphischen Darstellung von $K_{a/b}$ entnommen werden.

Damit kann jetzt aus den gemessenen Werten von ω_{\max} und C für jede kreisrunde und rechteckige Schicht mit Ringsumkontakten der Flächenwiderstand R_{\square} absolut bestimmt werden.

Das Verfahren wurde bereits erfolgreich angewandt bei der Untersuchung der elektrischen Leitfähigkeit dünner, metallischer Aufdampfschichten auf organischen Trägerfolien⁵.

Herrn Prof. Dr. E. HUSTER danke ich sehr für sein stetes, förderndes Interesse an dieser Arbeit, sowie für viele wertvolle Hinweise und Diskussionen. Ihm und Herrn Dr. W. RAUSCH verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit. — Ebenso zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Prof. Dr. H. WERNER für seine freundliche Unterstützung bei der Durchführung der numerischen Berechnungen.